תפיסות של פרחי הוראה למתמטיקה את התפתחות הידע המתמטי שלהם במהלך התנסותם בסביבת למידה דינאמית ממוחשבת

אילנה לביא
המכללה האקדמית עמק יזרעאל
ilanal@yvc.ac.il

עטרה שריקי
אורנים – המכללה האקדמית לחינוך
shriki@technion.ac.il

Perceptions of Prospective: Mathematics Teachers Regarding their Mathematical Knowledge while Engaging in Inquiry Tasks within a Dynamic Computerized Environment

Ilana Lavy
The Academic College of Emek Yezreel

Atara Shriki
Oramin – Academic College of Education

Abstract

In the present study, we explore perceptions of prospective mathematics teachers (PTs) regarding the development of their mathematical knowledge. The PTs were engaged in problem-posing activities in geometry, using the "What If Not?" strategy, as part of their work on computerized inquiry-based activities. Data received from the PTs' reflective journals reveals that they believe their engagement in inquiry-based activities enhanced their mathematical knowledge. They deepened their knowledge regarding the geometrical concepts and shapes involved, and during the process of generating a new problem and checking its validity and its solution, they deepened their understanding of the interconnections among the concepts and shapes involved. The dynamic geometry environment enabled to "see a proof in front of my eyes" due to its dragging ability, providing the PTs the confidence that the examined situation can be generalized. In addition, the dynamic software had a meaningful contribution to the process of understanding the meaning of mathematical proof.

Keywords: problem posing, dynamic geometry environment, the "what if not?" strategy.

תקציר

המחקר הנוכחי בחן את התפיסות של פרחי הוראה למתמטיקה בנוגע לידע המתמטי שלהם במהלך התנסות בלומדה דינאמית גיאומטרית. פרחי ההוראה עסקו בפעילות חקר תוך שימוש באסטרטגיה: "מה אם לא?" מניתוח נתוני המחקר עולה כי פרחי ההוראה סבורים שהידע המתמטי שלהם העמיק כתוצאה מהפעילות וכי ללומדה הייתה תרומה משמעותית בתהליך של העלאת בעיות מתמטיות חדשות. במהלך הפעילות הם חזרו על הגדרות של עצמים גיאומטריים, על תכונותיהם ועל הקשרים ההדדיים ביניהם, וכתוצאה מכך העמיקו את הידע המתמטי שלהם. ללומדה הדינאמית היה חלק חשוב בתהליך של פעילות החקר. הלומדה שחררה את הלומד מפעולות טכניות כמו חישובים ושרטוטים כך שהוא יכול היה להתמקד בחשיבה על העצמים, והקשרים ביניהם. הלומדה אפשרה "לראות הוכחה" על ידי פעולות של גרירה ובכך להעניק הרגשת בטחון ללומד שהמקרה שנגלה לעיניו הוא כללי ולא מקרה פרטי. כמו כן, ללומדה הייתה גם תרומה להבנת המשמעות של הוכחה מתמטית.

מילות מפתח: העלאת בעיות, לומדה דינאמית גיאומטרית, האסטרטגיה "מה אם לא?".

מבוא

העלאת בעיות (Problem Posing) היא אחת המיומנויות החשובות שיש לפתח בקרב תלמידים במהלך הוראת מתמטיקה ולמידתה (NCTM, 2000). כדי שמורים ירכשו את הידע ואת הביטחון הנדרשים לשילוב פעילויות של העלאת בעיות בכיתותיהם, חשוב שיתנסו תחילה בתהליך זה בעצמם במהלך תקופת ההכשרה שלהם כפרחי-הוראה.

המחקר הנוכחי בחן את התרומה של עיסוק בהעלאת בעיות ופתרונן באמצעות לומדה דינאמית גיאומטרית להתפתחות הידע המתמטי והדידקטי של פרחי-הוראה. במאמר זה נתמקד בתרומה של סביבת הלמידה להתפתחותו של הידע המתמטי של פרחי-ההוראה, כפי שנתפס על-ידם.

רקע תיאורטי

בפרק זה נציג סקירה קצרה בנוגע להעלאת בעיות בסביבה של גיאומטריה דינאמית, ועל הערך החינוכי של שילוב פעילויות מסוג זה בתכניות ההכשרה של פרחי-הוראה למתמטיקה.

העלאת בעיות בסביבה של גיאומטריה דינאמית

העלאת בעיות מהווה מרכיב חשוב בתוכנית הלימודים במתמטיקה, בהיותה חלק בלתי נפרד מהעשייה המתמטית (Brown & Walter, 1993; NCTM, 2000). העלאת בעיות כרוכה ביצירה של בעיות חדשות וחקירתן, וכן בניסוח מחדש של בעיה נתונה (Silver, 1994). מתן ההזדמנות ללומדים להעלות בעיות, עשוי להוביל לפיתוח של חשיבה גמישה ורב-גונית, לפיתוח מיומנויות של פתרון בעיות, להרחבת הידע המתמטי, ולפיתוח חשיבה לוגית ויכולת רפלקטיבית (Cunningham, 2004; English, 1996; Brown & Walter, 1993).

פעילויות של העלאת בעיות יכולות להתבצע בסביבות למידה שונות, כאשר כל סביבה משפיעה על אופי הפעילות באופן שונה. תלמידים אשר לומדים באמצעות לומדה דינאמית גיאומטרית מעלים בעיות ופותרים אותן בדרכים שלא היו מתאפשרות אילו הם היו פותרים את הבעיות באמצעות נייר ועיפרון (Aviram, 2001).

האינטראקציה עם לומדה דינאמית גיאומטרית מאפשרת ללומד לבדוק מספר רב של כיווני חקירה, מבלי לבזבז זמן ומאמצים על פעולות כמו שרטוט וחישוב (Artigue, 2002). בסביבת לימוד זו ניתן "לראות הוכחה", עלי-די סקירה מהירה של מגוון רחב של אפשרויות. סקירה זו חשובה במיוחד במקרה של העלאת בעיות, שכן הלומד מסוגל לבדוק את נכונותה של השערה שאותה העלה בטרם ינסה להוכיחה באופן פורמאלי.

הערך החינוכי של שילוב פעילויות של העלאת בעיות בתכניות ההכשרה של פרחי הוראה

למורים למתמטיקה תפקיד מרכזי בפיתוח סביבות למידה הכוללות פעילויות של העלאת בעיות. למרות ההכרה בחשיבות של העלאת בעיות על-ידי תלמידים, מורים ממעטים להטמיע סביבות למידה מסוג זה, וכתוצאה מכך, מחמיצים את ההזדמנות לעזור לתלמידיהם לפתח מיומנויות של העלאת בעיות ופתרון בעיות (Silver et al., 1996), אשר בכוחן לסייע לתלמידים לפתח ביטחון בהתמודדות עם מצבים מתמטיים לא מוכרים. הסיבה העיקרית להימנעותם של מורים מעיסוק בהעלאת בעיות טמונה בכך שמרבית התכניות להכשרת מורים אינן מקנות לפרחי-ההוראה את המיומנויות הנדרשות לצורך עיסוק בהעלאת בעיות (Leung & Silver, 1997). לפיכך, חשוב לשלב בתוכניות ההכשרה של פרחי-הוראה פעילויות של העלאת בעיות, במטרה לפתח תובנות בנוגע ליתרונות ולחסרונות של עיסוק בהעלאת בעיות, ולהעלות את ביטחונם ליישם סביבות למידה מסוג זה.

המחקר

בפרק זה נציג את אוכלוסיית המחקר, את סביבת הלמידה בה נערך המחקר וכמו כן את הכלים לאיסוף הנתונים וניתוחם.

אוכלוסיית המחקר

במחקר השתתפו 25 פרחי-הוראה למתמטיקה, הלומדים במכללה לחינוך בשנה השנייה (מתוך ארבע) לתואר ראשון במתמטיקה ולקראת קבלת תעודת הוראה לבתי-הספר העל-יסודיים.

סביבת הלמידה

הקורס בו נערך המחקר הוא הקורס הראשון בדידקטיקה של הוראת המתמטיקה שבו השתתפו פרחי-ההוראה. קורס זה הינו שנתי, ועוסק בהיבטים מגוונים של הוראת מתמטיקה בחטיבת-הביניים. המחקר נערך במהלך כל הסמסטר הראשון של הקורס. כיוון שהייתה זו הפעם הראשונה שבה הסטודנטים התנסו בהעלאת בעיות, המרצה הציגה בפניהם את השלבים השונים של העלאת בעיות, תוך יישומם על משפט מורגן (Watanabe, Hanson, & Nowosielski, 1996), ושימוש באסטרטגיה "מה אם לא?" (Brown & Walter, 1993). אסטרטגיה זו מבוססת על פירוק בעיה נתונה למרכיביה, שלילה של לפחות אחד מהמרכיבים, הצעת חלופה למרכיב שנשלל, והעלאת בעיה חדשה. הסטודנטים נדרשו לחזור על התהליך, ולבצעו תוך התבססות על בעיה מתוך ספרו של הונסברגר (Honsberger ,1985): משולש ABC חסום במעגל O. נקודה D נעה על היקף המעגל. מהנקודה D משרטטים ניצבים לצלעות AB ו-AC של המשולש. הנקודות E ו-F הן נקודות החיתוך של הניצבים עם הצלעות בהתאמה. היכן יש למקם את הנקודה D על היקף המעגל O, כך שאורך הקטע EF יהיה מקסימלי? בעיה זו נבחרה לאור העובדה שקיים בה מגוון רחב של סוגי נתונים, מה שמאפשר להעלות על בסיסה בעיות בעלות אופי שונה, ולהגיע להכללות של מצבים מגוונים.

שלבי העבודה כללו: 1. פתרון הבעיה הנתונה. 2. רישום כל המרכיבים של הבעיה. 3. שלילת כל מרכיב והצעת חלופות אפשריות עבורו או עבור שילוב של כמה מרכיבים שנשללו. 4. התמקדות באחת החלופות, העלאת בעיה חדשה, וחקירתה. 5. העלאת השערות בנוגע לבעיה החדשה שנוסחה, ואישושן או הפרכתן. 6. הכללת הממצאים שהתקבלו וניסוח מסקנות. 7. חזרה על השלבים 6-4 עד למיצוי התהליך.

במהלך כל שלבי העבודה נעזרו פרחי-ההוראה בלומדה דינאמית גיאומטרית ("הנדסה בתנועה").

כלים לאיסוף הנתונים ולניתוחם

פרחי-ההוראה ניהלו יומני למידה רפלקטיביים במהלך ביצוע הפעילות. בכל אחד משלבי התהליך הציגו פרחי-ההוראה את העבודות שלהם במליאה, ובעקבות ההצגות התנהלו דיונים כיתתיים הנוגעים למשמעות של פעילות חקר, בכלל, ולהיבט של העלאת בעיות, בפרט, תוך התייחסות לתרומתה של הלומדה. כל הדיונים הוקלטו.

הנתונים שנאספו מתוך היומנים ומתוך הדיונים הכיתתיים נותחו באמצעות ניתוח אינדוקטיבי (Taylor & Bogdan, 1998; Goetz & LeCompte, 1984). על פי גישה זו החוקר אוסף נתונים מהשטח ובונה תיאוריה המתבססת על המציאות. החוקר סוקר את הנתונים ללא קביעות מוקדמות, ומחפש אחר דפוסים החוזרים על עצמם. דפוסים אלו מהווים תשתית למערכת ראשונית של קטגוריות אותה הוא מנסה לבסס במהלך הסריקה של שאר נתוני המחקר.

תוצאות ודיון

המחקר בחן היבטים שונים של תרומת התהליך שתואר להתפתחות הידע המתמטי והדידקטי של פרחי-ההוראה. להלן נציג ממצאים חלקיים, ונתמקד בתרומה של עיסוק בהעלאת בעיות בסביבה של לומדה דינאמית גיאומטרית לשינוי הידע המתמטי של פרחי-ההוראה, כפי שנתפש על-ידם. תפישות אלה באו לידי ביטוי ברישומיהם של פרחי-ההוראה ביומני הלמידה הרפלקטיביים.

תרומת השימוש בלומדה להעלאת בעיות חדשות

מבין שבעת שלבי התהליך שתואר לעיל, עיקר העיסוק בהעלאת בעיות התבצע בשלבים 5-3 של התהליך. לצורך שלילת המרכיבים של הבעיה הנתונה נעזרו פרחי-ההוראה בתכונת הדינמיות של הלומדה, המאפשרת לגרור ולשנות את הצורה הנתונה ואת מימדיה. תכונה זו של הלומדה אפשרה לפרחי-ההוראה להעלות מגוון רחב של חלופות אפשריות למרכיבי הבעיה הנתונה. להלן חלק

מהבעיות שהועלו על-ידי פרחי-ההוראה בשלב 3, תוך הסתייעות בלומדה: א. שלילת הצורה החסומה- במקום לשרטט משולש, שרטטו כל פרחי-ההוראה מרובעים שונים חסומים במעגל, אותם גררו כדי לקבל מגוון של מרובעים. השאלות החדשות שהעלו עסקו בגבהים לשתיים מצלעותיהם של המרובעים. 14 מתוכם עסקו בחקר מחומשים, ו-4 הכלילו את ממצאיהם למצולע חסום כלשהו. ב. שלילת הצורה החוסמת- במקום לשרטט מעגל, שרטטו כל פרחי-ההוראה מרובעים שונים החוסמים את המשולש, והעלו שאלות בנוגע למיקום הנקודה על המרובע. 9 העלו בעיות בנוגע למחומש חוסם, ו-4 העלו בעיות הנוגעות להכללה עבור מצולע חוסם כלשהו. ג. שלילת תכונת הקטעים (הגבהים)- כל פרחי-ההוראה יצרו קטע שניתן להזיזו באופן דינמי על הצלעות, כך שלא יהווה בהכרח גובה. בתוך כך העלו בעיות הנוגעות ליחסים השונים בהם מחלקים הקטעים את הצלעות, ולתכונות של קטעים מיוחדים שנוצרו (כגון חוצה צלע וחוצה זווית). ד. שלילת ערכים מספריים (מספר הגבהים)- במקרה זה מחצית מפרחי-ההוראה העלו שאלות בהן ניתן ערך מספרי אחר, אם כי בטווח הגיוני. ממצאים אלו עולים בקנה אחד עם הממצאים שהתקבלו על ידי Lavy and Bershadsky (2003) אשר בדקו העלאת בעיות בתחום של גיאומטרית המרחב. ה. כשליש מהבעיות שהועלו על ידי פרחי-ההוראה כללו שילוב של שלילת יותר מאשר תכונה אחת, במטרה להגיע ל**הכללה** רחבה יותר. בין הצעות אלו נמצאו שני סוגים של הכללה: הכללה של ערך מספרי בשילוב עם הכללה של צורה גיאומטרית. לדוגמא, כאלטרנטיבה למצולע בעל 4 צלעות, נוסחה בעיה שעסקה במצולע חסום בעל n צלעות, ו-n גבהים המורדים מהנקודה D.

תרומת השימוש בלומדה להעמקת הידע הנוגע להגדרות של מושגים

לכאורה, נראה כי שלבים 2 ו-3 של העבודה דרשו מפרחי-ההוראה עבודה טכנית גרידא של רישום תכונות הבעיה ושלילתם. העובדה ששלב 3 התבצע בסיוע הלומדה הדינאמית, הביאה לידי כך שהעבודה חרגה בהרבה מהפן הטכני, ותרמה להעמקת הידע המתמטי. לדוגמא, היכולת לשנות בקלות בעזרת הלומדה את סוג המצולע החסום הביאה לידי כך שפרחי-ההוראה לא ראו במשולש "צורה שלמה", אלא מקרה פרטי של מצולע (בהתאם לתיאוריית "דימוי מושג" לעומת "הגדרת מושג", (Tall & Vinner, 1981). כתוצאה מכך, העידו פרחי-ההוראה שהתחדד אצלם הידע המתמטי בנוגע להגדרות של אובייקטים מתמטיים והקשרים שביניהם: *"למרות שהפעילות נראית מאוד טכנית - "שלול מרכיב והצע לו אלטרנטיבה"- היא ממש לא כזאת. אני הרגשתי שאני חוזרת על מושגים והגדרות שאת חלקם שכחתי. העבודה שהשתמשתי בלומדה מאד עזרה לי בכך. תוך כדי הגרירה של המשולש, הבנתי שבעצם אפשר לשנות לא רק את סוג המשולש, אלא שהוא בעצם מצולע, ולכן אפשר להפוך אותו בקלות למצולע אחר, על-ידי הוספת צלעות".*

תרומת השימוש בלומדה להבנת קשרים בין אובייקטים מתמטיים

בשלב השלישי התבקשו פרחי-ההוראה לשלול את מרכיבי הבעיה ולהציע חלופות. הדינאמיות של הלומדה, והאפשרות לגרור את העצמים, לשנות את גודלם וצורתם, כולל הגעה למקרים בלתי אפשריים תרמה, לפי עדותם, להתפתחותן של תובנות בנוגע לכך שקיים קשר בין אובייקטים מתמטיים, וכי הנתונים של כל בעיה מתמטית קשורים זה לזה בקשר נסיבתי, ואינם אקראיים. במילים אחרות, השימוש בלומדה בשלב של העלאת הבעיות סייע לפרחי-ההוראה להבין שבחירת הנתונים הכלולים בבעיה שהם מעלים איננה שרירותית וכי היא צריכה "לציית" לחוקים מתמטיים ולקשרים לוגיים מוגדרים, על-מנת שניתן יהיה להעלות בעיה תקיפה. כדי להצליח בניסוח בעיה תקיפה, היה על פרחי-ההוראה לבצע אינטגרציה מחודשת של הידע המתמטי שלהם בנוגע להגדרות של מושגים וקשרי הירככיה ביניהם: *"אחרי ששללתי צורה גיאומטרית או נתון מספרי בבעיה, שאלתי את עצמי במה אפשר להחליפם. התשובה לא הייתה כל כך פשוטה, כי כדי להיות בטוח שאלטרנטיבה מסוימת מתאימה, הייתי צריך לעבור בראש על כל התכונות שלה, ומהם המקרים הפרטים שלה. לצורך זה שרטטתי בעזרת הלומדה כמה אפשרויות, גררתי כדי לראות את המקרים הפרטיים, ובדקתי שלא גרמתי למצב אבסורדי". "השרטוט של אובייקטים שונים וגרירתם גרם לי להבין שיש כאן יותר מסתם נתונים בבעיה. יש סיבה לזה שנתונים מסויימים נמצאים ביחד בבעיה. החשיבה על איך לשרטט כל נתון בבעיה והקשר שלו לנתונים אחרים, גרמה לחזור שוב ולהעמיק בהגדרות של עצמים מתמטיים והקשרים ההדדיים ביניהם".*

תרומת השימוש בלומדה לאפיון "בעיה מתמטית מעניינת"

בשלב הרביעי, שלב בו היה על פרחי-ההוראה להתמקד באחת הבעיות שהעלו, ולחקור אותן, היה ללומדה הדינאמית תפקיד מכריע. כדי להחליט על הבעיה בחנו פרחי-ההוראה, בעזרת הלומדה, מגוון של מקרים, מתוך רצון להעלות בעיה שניתן לאפיין אותה, כהגדרתם, כ*"בעיה מעניינת"*, *"בעיה לא שגרתית"*, או *"בעיה המובילה לגילוי ממצא לא צפוי"*. כפועל יוצא מכך עסקו פרחי-ההוראה, במסגרת המליאה, בדיונים שהתמקדו במשמעות של "בעיה מתמטית מעניינת": *"עד היום קיבלנו בעיה והיינו אמורים להוכיח או לפתור אותה. לא התעמקנו בשאלה האם היא מעניינת או לא. אך כאשר הוצגה בפנינו בעיית מורגן שמקורה בבעיה מוכרת, הבנתי שגם מבעיה שנראית לכאורה סטנדרטית, ניתן על ידי שלילת חלק ממרכיביה והצבת מרכיבים אלטרנטיביים להגיע לבעיה ומעניינת"*. *"בעיה מעניינת היא בעיה שיש בה פוטנציאל לגלות חוקיות שלא הייתה מוכרת לנו עד כה"*.

תרומת השימוש בלומדה להבנת המשמעות של הוכחה מתמטית

בשלב החמישי, בעת שהיה על פרחי-ההוראה להעלות השערות בנוגע לבעיה שהעלו, התפתחה התובנה של פרחי-ההוראה בהקשר של המשמעות של הוכחה מתמטית וחשיבותה. אחת מההתלבטויות המרכזיות בשלב זה נגעה לשאלה: *"האם העובדה שבעזרת הלומדה הדינאמית אני יכול להראות שהטענה שלי תקיפה לכל המקרים אינה מצביע על-כך שאני מוכיח את הטענה?"*. כשליש מפרחי-ההוראה סבר שיש די בכך ש*"הלומדה מאפשרת לראות את ההוכחה מול העיניים"*, ואחרים טענו ש*"הלומדה עוזרת לקבוע איזו השערה נכונה ואיזו השערה אינה נכונה, אך ברור שעדיין צריך להוכיח את ההשערה באופן פורמלי, כי אולי לא בדקתי את כל האפשרויות בעזרת הלומדה"*. מחלוקת זו עוררה דיונים מעניינים במסגרת המליאה, שבמהלכם הבינו פרחי-ההוראה את מקור הצורך בהוכחה פורמלית, את משמעותה, את ההבדלים בין "הוכחה פורמלית" לבין "הוכחה ויזואלית", ומהם המקרים בהם הוכחה ויזואלית היא בכל-זאת הוכחה תקיפה.

סיכום והשלכות להכשרת פרחי-הוראה

העיסוק בהעלאת בעיות בסביבה של לומדה דינאמית גיאומטרית סייע להתפתחותו של הידע המתמטי והדידקטי של פרחי-ההוראה, כפי שעולה מתוך יומני הלמידה שלהם. עבור רובם זו הייתה ההתנסות הראשונה בפעילות מסוג זה, וכיוון שהם לא התנסו בהעלאת בעיות כלומדים, ניתנה להם הזדמנות לדון בתהליכי הלמידה הקשורים בפעילות מסוג זה, ביתרונות ובחסרונות שלה. *"פעילות מסוג זה הייתה חדשה עבורי. זו הפעם הראשונה שבה התבקשתי להמציא בעיה מתמטית. בהתחלה חשתי חוסר בטחון אך כשנחשפתי לבעיות שהועלו על-ידי חברי לכיתה, הביטחון שלי עלה ואפילו נהניתי מכך. אני לא חושב שהייתי עושה פעילות כזו עם התלמידים שלי מבלי שקודם הייתי מתנסה בכך"*.

השימוש באסטרטגיה "מה אם לא?" לביצוע פעילות החקר סיפק לפרחי ההוראה מסגרת מובנית בה יכלו לבצע את הפעילות. החשיבות של עבודה במסגרת מובנית נבעה הן מהעובדה שזוהי ההתנסות הראשונה שלהם בפעילות מסוג זה והן מאופי הפעילות שעשוייה להוביל לכיווני חקירה ללא מוצא שעלולים לגרום ללומדים להרים ידיים.

הניהול של יומני הלמידה הרפלקטיביים במהלך הפעילות תרמו אף הם להעלאת המודעות של פרחי ההוראה בנוגע לתהליכים השונים שעברו במהלכה, הן כלומדים והן כמורים לעתיד. *"בין הדברים השונים שלמדתי במהלך הפעילות היה לכתוב בצורה רפלקטיבית. בהתחלה היה לי קשה מאוד כיוון שלא ידעתי לסנן בין פרטים חשובים למשניים. עם הזמן הכתיבה שלי נעשתה טובה יותר וכאשר קראתי את מה שכתבתי, הבנתי שעצם הכתיבה סייע לי להפנים תהליכים שעברתי במהלך הפעילות"*.

כעוסקות בהכשרת פרחי-הוראה אנו מאמינות שרק אם יתנסו בגישות הוראה חדשניות במסגרת לימודיהם, קיים סיכוי לכך שיישמו גישות אלה במהלך עבודתם. במקרה המתואר, ההתנסות איפשרה לפרחי-ההוראה לפתח תובנות בנוגע לתרומה של העלאת בעיות בסביבה של לומדה דינאמית ללימוד גיאומטריה.

מקורות

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7(*3), 245-274.

Aviram, A. (2001). From “computers in the classroom” to mindful radical adaptation by education systems to the emerging cyber culture. *Journal of Educational Change*, *1*, 331-352.

Brown , S. I., & Walter, M. I. (1993). Problem Posing in Mathematics Education. In Stephen I. Brown & Marion I. Walter (Eds.) *Problem Posing: Reflection and Applications*, Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 16-27.

Cunningham, R. (2004). Problem posing: an opportunity for increasing student responsibility, *Mathematics and Computer Education*, *38*(1), 83-89.

English. L. D. (1996). Children’s problem posing and problem solving preferences. In J. Mulligan & M. Mitchelmore (Eds.), *Research in Early Number Learning*. Australian Association of Mathematics Teachers.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research.* Academic Press.

Honsberger, R. (1985). *Mathematical Gems III*, The Mathematical Association of America.

Lavy, I., & Bershadsky, I. (2003). Problem Posing via "What if not?" strategy in Solid Geometry - A case study, *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 369-387.

Leung, S. S., & Silver E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge and creative thinking on the arithmetic problem posing of pre-service elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), 5-24.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational studies in mathematics*, 151-169.

Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1998). *Introduction to qualitative research methods (3rd ed.).* New York: John Wiley.

Watanabe, T., Hanson R., & Nowosielski, F. D. (1996). Morgan's Theorem. *The Mathematics teacher*, *89*(5), 420-423